

文章编号:1000-8055(2013)01-0180-08

用于气动声学计算的非均匀网格紧致差分格式

陈志夫^{1,2}, 文桂林^{1,2}, 王艳广^{1,2}, 王 明^{1,2}

(1. 湖南大学 汽车车身先进设计制造国家重点实验室, 长沙 410082;

2. 湖南大学 航天技术研究所, 长沙 410082)

摘 要: 为克服传统紧致差分格式在数值求解非均匀网格问题时产生的寄生波, 构造了一种新的高精度紧致差分格式. 通过泰勒展开分析方法, 详细给出了格式系数的通用形式; 利用傅里叶分析方法, 分析了数值耗散、色散误差. 以 3 对 6 阶精度紧致差分格式求解均匀扰动网格问题为例, 计算表明: 色散值和耗散值随扰动因子的增加而更加趋近于精确值; 当扰动因子大于 0.213 时, 格式不稳定, 当扰动因子小于等于 0.213 时, 格式渐近稳定; 对一维对流波和二维波传播的模拟计算所得数值解与精确解吻合, 体现了该格式在求解非均匀网格问题时的优越性.

关 键 词: 非均匀网格; 气动声学; 紧致差分格式; 寄生波; 耗散; 色散; 渐近稳定

中图分类号: V211.3

文献标志码: A

Compact finite difference schemes on non-uniform meshes
for computational aeroacousticsCHEN Zhi-fu^{1,2}, WEN Gui-lin^{1,2}, WANG Yan-guang^{1,2}, WANG Ming^{1,2}

(1. State Key Laboratory of Advanced Design and Manufacturing for Vehicle Body,

Hunan University, Changsha 410082, China;

2. Institute of Space Technology, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract: When the classic compact finite difference scheme was applied to practical problems using non-uniform meshes, the spurious numerical oscillations would be excited. A high accuracy of compact scheme was developed for this problem. The general expressions of the scheme's coefficients were derived through Taylor expansion analysis; then the numerical dispersion and dissipation were analyzed by using Fourier analysis method. For the case that the sixth-order tridiagonal compact scheme was applied to non-uniform meshes, the results are shown: the dispersion and dissipation values are closer to the exact solution with the increase of disturbance factor; the scheme is asymptotically stable when the disturbance factor is less than or equal to 0.213, otherwise it is the opposite; the results of numerical solution for one-dimensional convective wave and two-dimensional wave propagation agree well with the theoretical solution, which shows advantages in the simulation of non-uniform meshes for computational aeroacoustics.

Key words: non-uniform mesh; aeroacoustic; compact difference scheme;
spurious numerical oscillation; dissipation; dispersion;
asymptotical stability

收稿日期: 2011-12-27

网络出版地址: http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2297.V.20130114.1726.201301.180_025.html

基金项目: 教育部长江学者与创新团队发展计划(531105050037);

湖南大学汽车车身先进设计制造国家重点实验室自主课题(61075003)

作者简介: 陈志夫(1986—), 男, 湖南益阳人, 博士生, 主要从事计算气动声学研究. E-mail: garychen668@yahoo.cn

紧致差分格式由于既具有一般差分格式的稳健性又具有谱方法的高阶精度,已经广泛应用于湍流直接模拟和气动声学计算,是近年计算流体力学领域的研究热点^[1-3]. Lele 在 Padé 格式的基础上构造了一系列高精度紧致差分格式^[4], Kim 采用 Tam 的色散保持方法优化了 Lele 的紧致差分格式并构造了数值边界格式^[5-7],后来 Kim 利用多项式和三角级数插值,进一步优化了数值边界格式^[8]. Hixon 利用分裂的思想,提出了一种新的紧致差分格式,减少了边界计算节点数,减少了计算开销^[9],随后 Ashcroft 对该格式进行了优化^[10]. 然而,这些格式都是基于等距网格的基础上提出的,在实际计算问题中,经常需要考虑非均匀网格设计.

罗柏华利用泰勒级数展开法构造了不等距网格下 7 点 6 阶精度显式差分格式^[11], Tam 提出了求解多尺度气动声学问题的多空间网格步长多时间步长的色散保持显式差分格式^[12],该格式由于计算效率高,在实际中获得了广泛应用^[13-14]. Cheong 和 Lee 提出了一种基于色散保持的网格优化显式差分格式^[15],随后,胡睿等^[16]和司海青等^[17-18]相继发展了该方法. 该方法要求在每个网格节点进行优化,因而计算量巨大,不利于实际工程应用. 葛永斌等构造了一种适用于求解三维对流扩散方程的非等距网格 4 阶紧致格式,并研究了多重网格方法,获得了良好的求解特性^[19]. Shukla 等^[20]和 Gamet 等^[21]分别采用多项式插值方法、直接泰勒展开方法构造了高精度紧致差分格式. 然而,对于非均匀网格差分格式,大多采用 Jacobian 变换将物理空间的非均匀网格变换到计算域的均匀网格,这在物理空间网格变化剧烈的地方会产生较大的误差,引起虚假振荡^[21-22].

本文尝试了非等距网格下高精度紧致差分格式用于气动声学计算的可行性,通过泰勒级数展开,构造了不等距网格下 5 点 6 阶精度空间紧致离散格式,时间积分采用 Hu 的 6 级 6 阶精度显示推进格式^[23],有效地消除了由于不等距网格引起的数值振荡.

1 非等距网格紧致差分格式

1.1 内部紧致差分格式

对于非均匀网格,函数 f 在点 x_i 处的紧致差分格式为

$$\sum_{j=-M}^M b_{ij} f'_{i+j} = \frac{1}{\Delta x_i} \sum_{j=-N}^N a_{ij} f_{i+j} \quad (1)$$

其中 b_{ij}, a_{ij} 为差分格式的待定系数; f'_{i+j} 为 f 在点 x_{i+j} 处的空间 1 次微分; M, N 为节点模板数; $\overline{\Delta x_i}$ 是在 x_i 处的 $2N+1$ 点网格基点的平均网格步长. $\overline{\Delta x_i}, f_{i+j}$ 的定义分别如下:

$$\overline{\Delta x_i} = \frac{x_{i+N} - x_{i-N}}{2N} \quad (2)$$

$$f_{i+j} = f(x_i + \Delta x_j \times \overline{\Delta x_i}) \quad (3)$$

其中 Δx_j 是无因次网格间距,其定义为

$$\Delta x_j = \frac{x_{i+j} - x_i}{\overline{\Delta x_i}} \quad (4)$$

把式(1)左右两端项在 x_i 点做泰勒级数展开,比较两端展开式中同阶导数的系数,可以得到一组关于 b_{ij}, a_{ij} 的线性代数方程组

$$\sum_{j=-N}^N a_{ij} = 0 \quad 0 \text{ 阶} \quad (5)$$

$$\sum_{j=-N}^N \Delta x_j a_{ij} = 1 + \sum_{j=-M}^M b_{ij} \quad 1 \text{ 阶} \quad (6)$$

$$\sum_{j=-N}^N (\Delta x_j)^p a_{ij} = \frac{p!}{(p-1)!} \sum_{j=-M}^M (\Delta x_j)^{p-1} b_{ij} \quad (7)$$

$$p = 2, 3, \dots, 2(M+N) + 1 \text{ 阶}$$

解此线性方程组就可以确定出该点处格式的系数. 对于等距网格,每一网格点上的格式系数都相同,而对于非等距网格,其格式系数随网格间距的变化而变化. 本文以 5 点 6 阶三对角紧致格式 ($M=1, N=2, b_{ii}=1$) 为例,构造其边界紧致格式,分析其格式特征,验证其模拟能力.

1.2 边界紧致差分格式

如果将一维计算域划分成 Q 个区间,对于 5 点 6 阶三对角紧致格式,在非周期边界的条件下,式(1)只能运用在 $3 \leq i \leq Q-2$ 网格点上,为了将偏微分方程在整个计算域上离散,同时考虑格式的稳定性,边界格式离散采用以下不对称格式:

边界点 $i=1$ 处

$$f'_1 + b_{12} f'_2 = \frac{1}{\Delta x_1} \times (a_{11} f_1 + a_{12} f_2 + a_{13} f_3) \quad (8)$$

次边界点 $i=2$ 处

$$b_{21} f'_1 + f'_2 + b_{23} f'_3 = \frac{1}{\Delta x_2} \times (a_{21} f_1 + a_{22} f_2 + a_{23} f_3) \quad (9)$$

对式(8)和式(9)采用同内点格式一样的处理方法,即可得到格式的系数,该边界格式在节点 1 和 2 处的精度分别为 3 阶和 4 阶. 对于节点 $Q-1, Q$ 处的边界格式与节点 1 和 2 处格式构造方法类似.

1.3 时间导数离散——显示推进格式

本文采用6级6阶Runge-Kutta显示推进格式来计算时间方向的积分. 假设随时间变化的方程为

$$\frac{\partial U}{\partial t} = F(U) \quad (10)$$

其中 U 为空间网格点处求解变量向量; F 为空间导数离散格式函数. 假设在时间层 $t=n\Delta t$ 的解 U^n 已经求得, 利用Hu构造的低储存低耗散低色散格式求取下一时间步 $t=(n+1)\Delta t$ 的解 U^{n+1} .

1) 从 $j=1, 2, \dots, 6$, 计算

$$K_j = \Delta t \cdot F(U^n + \beta_j \times K_{j-1}) \quad (11)$$

取 $K_1=0$.

2) 计算

$$U^{n+1} = U^n + K_6 \quad (12)$$

其中 Δt 为时间步长, β_j 为相应的格式系数, 求法可参考文献[23], 其值依次为

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 0 & \beta_2 &= 0.1691935 \\ \beta_3 &= 0.1874412 & \beta_4 &= 0.25 \\ \beta_5 &= 0.3333333 & \beta_6 &= 0.5 \end{aligned}$$

2 格式特征分析

为了考察该格式对非等距网格的求解特征, 针对一维对流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad -35 \leq x \leq 35$$

采用以下网格来分析该格式的耗散、色散误差以及稳定性:

1) 均匀网格

$$\begin{aligned} x(j) &= -35 + (j-1) \times 1 \\ 1 &\leq j \leq 71 \end{aligned}$$

2) 扰动网格

$$\begin{aligned} x(j) &= (j-36+\alpha) + (-1)^j \times \alpha \\ 1 &\leq j \leq 71 \end{aligned}$$

式中 α 为扰动因子.

2.1 傅里叶误差分析

对于内部紧致差分格式(1), 对等式两边做傅里叶变换得到

$$\begin{aligned} w[A(w) + i \times B(w)] &= \\ C(w) + i \times D(w) \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $w=k\Delta x$, w 为量化波数, 其取值范围为 $[0, \pi]$, $i=\sqrt{-1}$, 对于非均匀网格, 在每个网格点, 函数 A, B, C, D 的取值不同.

$$\overline{w}(w) = \overline{w_r}(w) + i \times \overline{w_i}(w) \quad (14)$$

其中 $\overline{w} = \overline{k} \Delta x$ 为差分格式的实际量化波数, $\overline{w_r}$ 为差分格式实际量化波数的实部, 代表色散误差, 而 $\overline{w_i}$ 为差分格式实际量化波数的虚部, 代表耗散误差. 由式(13)、式(14)可得其值分别为

$$\overline{w_r}(w) = \frac{A(w)C(w) + B(w)D(w)}{A^2(w) + B^2(w)} \quad (15)$$

$$\overline{w_i}(w) = \frac{A(w)D(w) - B(w)C(w)}{A^2(w) + B^2(w)} \quad (16)$$

对于上述网格, 以点 $x=0$ 处的紧致格式为例, 说明其耗散、色散误差. 为了考察该格式对非等距网格的求解能力, 选取了5种不同的扰动因子, 其值依次为0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 即相邻2个网格间距比依次为1, 1.5, 2, 3.33, 4, 9. 图1、图2和图3分别给出了不同扰动因子网格下, 点 $x=0$ 处的紧致格式的色散变化和耗散变化, 该图显示: 扰动因子越大, 即网格变化越剧烈, 其耗散、色散误差越小; 群速度均为正值, 且随着扰动因子的增大而更加逼近精确解; 当扰动因子为0.4时, 其群速度值近似等于精确值1; 耗散均为正值, 且当扰

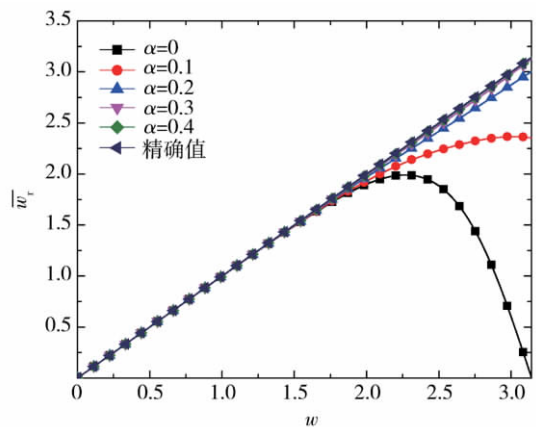


图1 色散特性随扰动因子变化

Fig. 1 Dispersion vs. disturbance factors

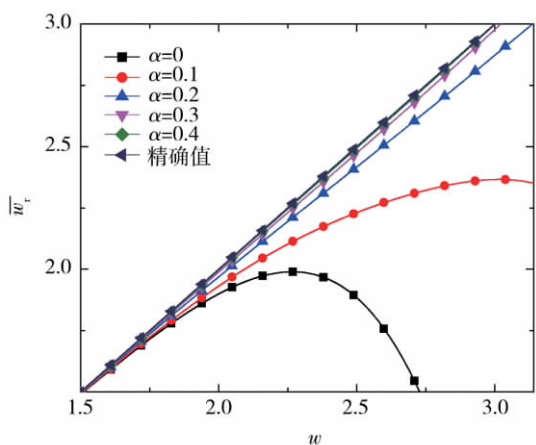


图2 色散特性随扰动因子变化局部放大图

Fig. 2 Detail view of dispersion vs. disturbance factors

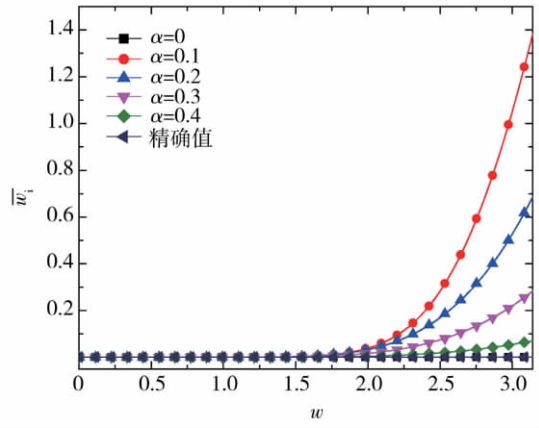


图 3 耗散特性随扰动因子变化

Fig. 3 Dissipation vs. disturbance factors

动因子为 0.4 时,在很大频率范围内耗散值近似等于精确值 0.

2.2 渐近稳定性分析

对于一维对流方程,将计算域离散成 N 份,采用 1.1 节的内点格式和 1.2 节的边界格式对 1 阶微分离散,构成了一个封闭的方程组

$$\frac{dU}{dt} = -(L)^{-1}R \cdot \dot{X}U \quad (17)$$

其中“ $\cdot$ ”为运算符,其含义与软件 MATLAB 中的点乘运算一致,即矩阵对应位置元素进行乘积运算

$$U = (u_1, u_2, \dots, u_N, u_{N+1})^T \quad (18)$$

$$X_{ij} = \frac{1}{\Delta x_i} \quad i, j = 1, 2, \dots, N+1 \quad (19)$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & & & & \\ b_{21} & 1 & b_{23} & & & 0 \\ & b_{31} & 1 & b_{32} & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & b_{(N-1)(N-2)} & 1 & b_{(N-1)N} \\ 0 & & & b_{N(N-1)} & 1 & b_{N(N+1)} \\ & & & & b_{(N+1)N} & 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$R = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & a_{(N+1)(N+1)} & a_{(N+1)(N+1)} & a_{(N+1)(N+1)} & a_{(N+1)(N+1)} & a_{(N+1)(N+1)} \\ 0 & & a_{N(N-1)} & a_{NN} & a_{N(N+1)} & \\ & & a_{(N+1)(N-1)} & b_{(N+1)N} & a_{(N+1)(N+1)} & \end{pmatrix} \quad (21)$$

如果给定一维对流方程的初始和边界条件

$$\begin{cases} u(x, 0) = F(x) \\ u(0, t) = g(t) \end{cases} \quad (22)$$

则式(17)可改写为

$$\frac{dU^*}{dt} = -(L^*)^{-1}R^* \cdot X^*U^* + Cg(t) \quad (23)$$

其中

$$U^* = (u_2, u_3, \dots, u_N, u_{N+1})^T \quad (24)$$

$$X_{ij}^* = \frac{1}{\Delta x_{i+1}} \quad i = 2, 3, \dots, N \quad j = 1, 2, \dots, N$$

$$X_{1j}^* = 1 \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (25)$$

$$L^* = \begin{pmatrix} 1 & b_{12}^* & & & & \\ b_{21}^* & 1 & b_{23}^* & & & 0 \\ & b_{32}^* & 1 & b_{34}^* & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & b_{(N-2)(N-3)}^* & 1 & b_{(N-2)(N-1)}^* \\ 0 & & & & b_{(N-1)(N-2)}^* & 1 & b_{(N-1)N}^* \\ & & & & & b_{N(N-1)}^* & 1 \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$R^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & & & & \\ a_{21}^* & a_{22}^* & a_{23}^* & a_{24}^* & & 0 \\ a_{31}^* & a_{32}^* & a_{33}^* & a_{34}^* & a_{35}^* & \\ & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & a_{(N-2)(N-4)}^* & a_{(N-2)(N-3)}^* & a_{(N-2)(N-2)}^* & a_{(N-2)(N-1)}^* & a_{(N-2)N}^* \\ 0 & & & & a_{(N-1)(N-2)}^* & a_{(N-1)(N-1)}^* & a_{(N-1)N}^* \\ & & & & a_{N(N-2)}^* & a_{N(N-1)}^* & a_{NN}^* \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$C = -(L^*)^{-1}(c_1, c_2, 0, \dots, 0)^T \quad (28)$$

L^*, R^* 和 C 中的元素由以下等式计算:

$$b_{1j}^* = \frac{b_{2(j+1)}}{1 - b_{12}b_{21}} \quad j = 2, 3, \dots, N$$

$$b_{ij}^* = b_{(i+1)(j+1)} \quad i = 2, 3, \dots, N \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (29)$$

$$a_{1j}^* = \frac{\frac{a_{2(j+1)}}{\Delta x_2} - \frac{b_{21}a_{1(j+1)}}{\Delta x_1}}{1 - b_{12}b_{21}} \quad j = 1, 2, \dots, N$$

$$a_{ij}^* = a_{(i+1)(j+1)} \quad i = 2, 3, \dots, N \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (30)$$

$$c_1 = \frac{\frac{a_{21}}{\Delta x_2} - \frac{b_{21}a_{11}}{\Delta x_1}}{1 - b_{12}b_{21}} \quad c_2 = \frac{a_{31}}{\Delta x_3}$$

$$c_j = 0 \quad j = 3, 4, \dots, N \quad (31)$$

根据常微分方程组的稳定性理论可知, $g(t)$ 的取值不影响方程组 (23) 的稳定性特性, 因此假设 $g(t) = 0, U^* = e^{\lambda t} \tilde{U}$, 则方程组 (23) 可转化成特征值问题

$$\lambda e^{\lambda t} \tilde{U} = -(L^*)^{-1} R^* \cdot X^* e^{\lambda t} \tilde{U} \quad (32)$$

定义

$$h = \min(\overline{\Delta x_i}, 2 \leq i \leq N+1)$$

$$\lambda^* = \lambda h$$

$$M = -(L^*)^{-1} R^* \cdot X^* h \quad (33)$$

其中 M 为 $N \times N$ 维矩阵. 若 M 的所有特征值的实部全为负数, 则该半离散格式 (17) 满足渐近稳定性要求, 即该格式计算稳定^[24]. 利用 MATLAB

软件求解矩阵 M 的所有特征值. 为了了解该格式对不同扰动因子扰动网格的求解稳定性, 采用 2.1 节同样的处理方法, 取 5 种不同的扰动因子进行特征值计算, 其相图如图 4 所示. 从图中可以看出, 特征值相图为“V”字型结构, 扰动因子越大, 其相图结构越窄; 当扰动因子大于 2 时, 出现了正特征值, 因而不满足渐近稳定性要求, 该格式不稳定. 通过大量计算, 发现满足渐近稳定性要求的最大扰动因子为 0.213, 即在相邻网格间距比不高于 2.484 时, 该格式求解稳定.

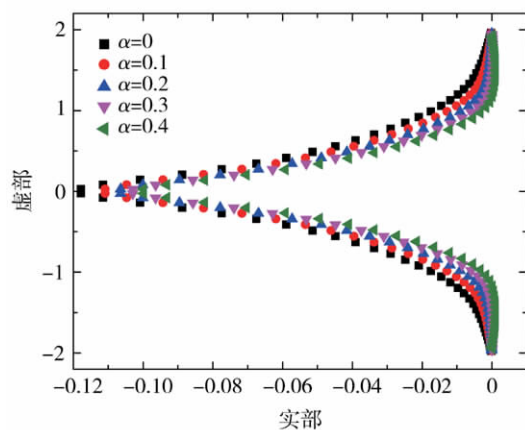


图 4 特征值相图随扰动因子变化

Fig. 4 Eigenvalues vs. disturbance factors

3 数值算例

为验证该格式求解非等距网格气动声学问题的精度和稳定性, 本节选用两个第 1 届计算气动

声学会议标准问题^[25]:一维对流波问题和二维声波传播问题. 计算中空间离散格式采用 1.1 节和 1.2 节的紧致格式, 时间格式采用 1.3 节所述 6 级 6 阶低耗散低色散 Runge-Kutta 显示推进格式.

3.1 一维对流波模拟

一维波对流的控制方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (34)$$

其中波速 a 设为 1. 初始条件如下:

$$u(x, t=0) = 0.5 e^{[-(\ln 2) \times (\frac{x+200}{3})^2]} \quad (35)$$

计算域为 $x \in [-240, 240]$, 采用第 2 节所述网格进行计算求解, 时间步长设为 0.5, 计算 $t=400$ 时的结果和求解误差, 求解误差定义为 $|u_{\text{calc}} - u_{\text{exact}}|$. 计算所得结果如图 5 所示, 该格式在不同扰动因子网格下所得数值解与精确解吻合很好. 图 6 给

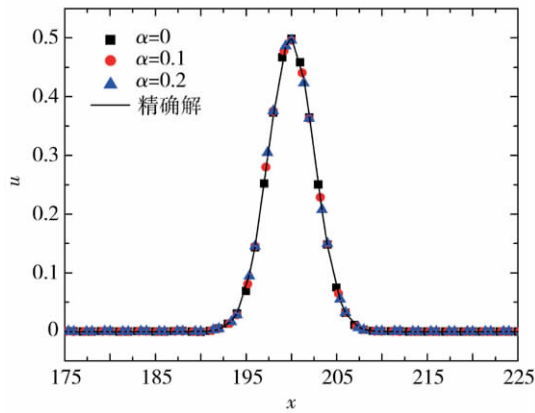


图 5 不同扰动因子求解结果与精确解比较

Fig. 5 Comparison of exact solution with numerical simulation vs. disturbance factors

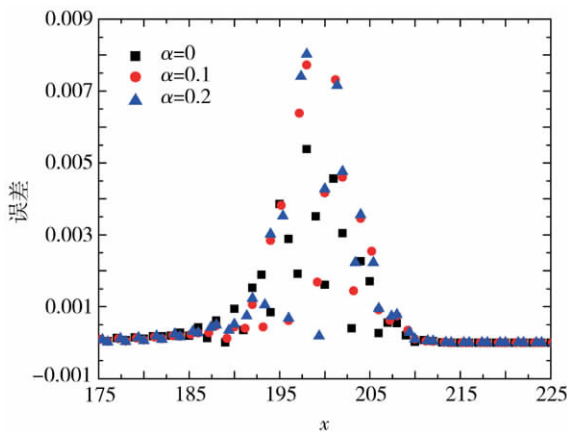


图 6 不同扰动因子求解误差比较

Fig. 6 Comparison of computation error vs. disturbance factors

出了 3 种不同扰动因子对求解精度的影响, 该图显示: 求解误差随扰动因子的增大而增大, 但增幅很小; 各网格求解误差最大值均小于 0.008.

3.2 二维声波传播模拟

二维声波传播的控制方程为二维线性欧拉方程, 其矢量形式为

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = 0 \quad (36)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{pmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \rho_0 u + u_0 \rho \\ u_0 u + \frac{p}{\rho_0} \\ u_0 v \\ u_0 p + \gamma p_0 u \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho_0 v \\ 0 \\ \frac{p}{\rho_0} \\ \gamma p_0 v \end{pmatrix} \quad (37)$$

其中 u, v 分别表示 x, y 方向的速度; ρ 和 p 分别表示密度和压力, $\rho_0 = 1, p_0 = 1, \gamma = 1.4, u_0$ 为 x 方向时均流速度, 其值为 $u_0 = Ma_x c_0$, Ma_x 为 x 方向马赫数. 在该算例中取值为 0.5, $c_0 = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}$.

给定问题的初始条件

$$p(x, y, 0) = \rho_0 c_0^2 e^{-(\ln 2) \left[\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{9} \right]}$$

$$\rho(x, y, 0) = \rho_0 e^{-(\ln 2) \left[\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{9} \right]} +$$

$$0.1 \rho_0 e^{-(\ln 2) \left[\frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{25} \right]}$$

$$u(x, y, 0) =$$

$$0.04 c_0 (y - y_1) e^{-(\ln 2) \left[\frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{25} \right]}$$

$$v(x, y, 0) =$$

$$-0.04 c_0 (x - x_1) e^{-(\ln 2) \left[\frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{25} \right]}$$

(38)

其中 $x_0 = 0, y_0 = 0, x_1 = 67, y_1 = 0$. 计算域为 $x, y \in [-100, 100]$, 计算中时间步长取为 0.1, 计算区域左边、上边和下边采用辐射边界条件, 而右边采用出流边界条件, 计算网格采用第 2 节中的网格方案, 当扰动因子为 0.2 时的网格如图 7 所示. 精确解求法参考文献^[25]. 图 8、图 9 分别给出了 $t=30$ 和 $t=60$ 时在 x 轴上随 x 变化的密度

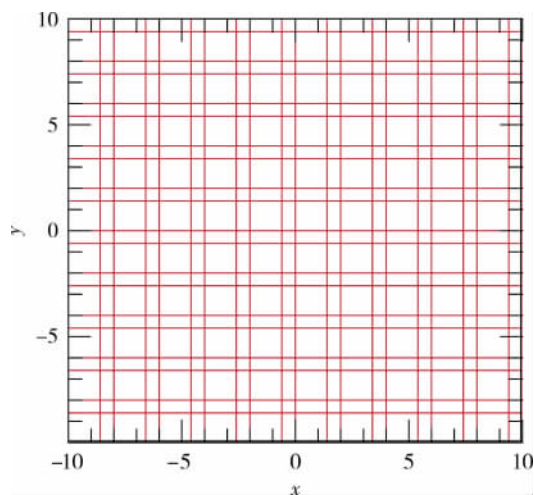
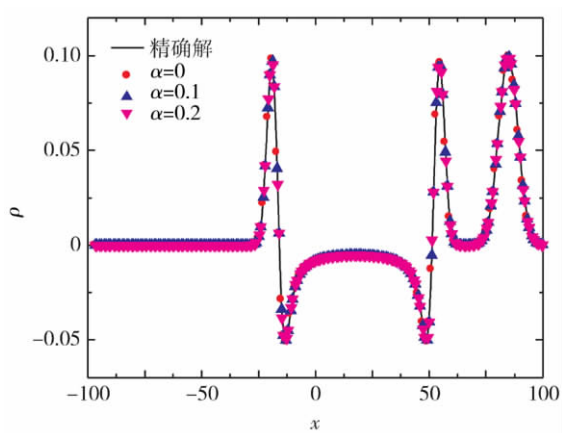
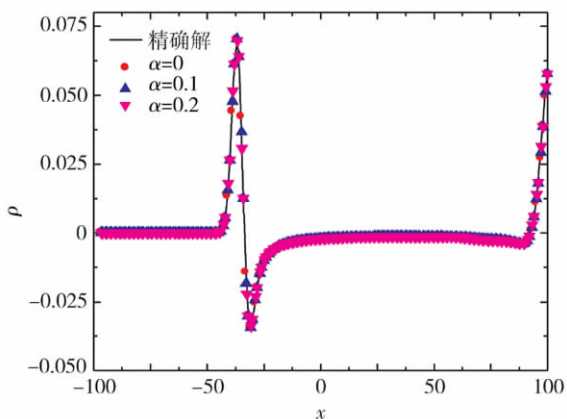


图7 计算网格局部放大图

Fig. 7 Detail view of computation grid

图8 $t=30$ 时不同扰动因子网格 x 轴密度波形图Fig. 8 Density waveform along the x -axis vs. disturbance factors at $t=30$ 图9 $t=60$ 时不同扰动因子网格 x 轴密度波形图Fig. 9 Density waveform along the x -axis vs. disturbance factors at $t=60$

值,通过与精确解对比,发现数值解与精确解一

致.因此,该格式在处理非均匀网格时,能准确模拟波动传播,消除因网格不均匀导致的非物理振荡,这是其他基于等距网格而发展的紧致差分格式所不能比拟的.

4 结 论

本文提出了一种非等距网格高精度紧致差分格式,详细给出了格式系数的通用形式,推导了半离散格式满足渐近稳定的条件,以均匀扰动网格为例,详细分析了扰动因子对格式的耗散、色散误差以及稳定性的影响,通过大量计算发现:

1) 该格式在处理均匀扰动网格时,其色散值和耗散值随扰动因子的增加而更加趋近于精确值.

2) 对于均匀扰动网格,当扰动因子大于 0.213 时,格式不稳定,当扰动因子小于等于 0.213 时,格式渐近稳定.

3) 通过对一维对流波和二维波传播的模拟计算,所得数值解与精确解吻合.

本文所建立的高精度紧致差分格式,在进行非均匀网格数值模拟时,能够消除因非等距网格引起的非物理振荡,格式构造方便,计算准确,显示了其在非等距网格模拟中的优越性.

参考文献:

- [1] TIAN Zhenfu, Yu P X. An efficient compact difference scheme for solving the streamfunction formulation of the incompressible Navier-Stokes equations [J]. Journal of Computational Physics, 2011, 230(17): 6404-6419.
- [2] LIU Min, WU Keqi. Aerodynamic noise propagation simulation using immersed boundary method and finite volume optimized prefactored compact scheme [J]. Journal of Thermal Science, 2008, 17(4): 361-367.
- [3] Jordan S A. Optimization resolution and application of composite compact finite difference templates [J]. Applied Numerical Mathematics, 2011, 61(1): 108-130.
- [4] Lele S K. Compact finite difference schemes with spectral like resolution [J]. Journal of Computational Physics, 1992, 103(1): 16-42.
- [5] Tam C K W, Webb J C. Dispersion relation preserving finite difference schemes for computational acoustics [J]. Journal of Computational Physics, 1993, 107(2): 262-281.
- [6] Kim J W, Lee D J. Optimized compact finite difference schemes with maximum resolution [J]. AIAA Journal, 1996, 34(5): 887-893.
- [7] Kim J W, Lee D J. Implementation of boundary conditions for optimized high-order compact scheme [J]. Journal of Computational Acoustics, 1997, 5(2): 177-191.
- [8] Kim J W. Optimized boundary compact finite difference

- schemes for computational aeroacoustics[J]. Journal of Computational Physics, 2007, 225(1): 995-1019.
- [9] Hixon R. Prefactored small stencil compact schemes[J]. Journal of Computational Physics, 2000, 165(2): 522-541.
- [10] Ashcroft G, Zhang X. Optimized prefactored compact schemes[J]. Journal of Computational Physics, 2003, 190(2): 459-477.
- [11] 罗柏华, 王泽晖, 刘宇陆. 非等距网格高精度差分方法用于气动声学问题计算[J]. 上海大学学报: 自然科学版, 2004, 10(1): 59-63.
- LUO Baihua, WANG Zehui, LIU Yulu. High order finite difference scheme based on non uniform meshes for aeroacoustics applications[J]. Journal of Shanghai University: Natural Science, 2004, 10(1): 59-63. (in Chinese)
- [12] Tam C K W, Kurbatskii K A. Multi-size mesh multi-time step dispersion relation preserving scheme for multiple scales aeroacoustics problems[J]. International Journal of Computational Fluid Dynamics, 2003, 17(2): 119-132.
- [13] Tam C K W, Ju H B, Walker B E. Numerical simulation of a slit resonator in a grazing flow under acoustic excitation[J]. Journal of Sound and Vibration, 2008, 313(3/4/5): 449-471.
- [14] Tam C K W, Ju H B. Finite difference computation of acoustic scattering by small surface inhomogeneities and discontinuities[J]. Journal of Computational Physics, 2009, 228(16): 5917-5932.
- [15] Cheong C, Lee S. Grid optimized dispersion relation preserving schemes on general geometries for computational aeroacoustics[J]. Journal of Computational Physics, 2001, 174(1): 248-276.
- [16] 胡睿, 李晓东. 非均匀笛卡尔坐标系网格优化频散相关保持格式研究[J]. 航空动力学报, 2005, 20(1): 1-7.
- HU Rui, LI Xiaodong. Grid optimized dispersion relation preserving schemes for non-uniform Cartesian grids[J]. Journal of Aerospace Power, 2005, 20(1): 1-7. (in Chinese)
- [17] SI Haiqing, WANG Tongguang. Grid optimized upwind dispersion relation preserving scheme on non-uniform Cartesian grids for computational aeroacoustics[J]. Aerospace Science and Technology, 2008, 12(8): 608-617.
- [18] SI Haiqing, WANG Tongguang, CHEN Du. Grid-optimized upwind DRP finite difference scheme on curvilinear grids for computational aeroacoustics[J]. Aerospace Science and Technology, 2011, 15(2): 90-102.
- [19] 葛永斌, 田振夫, 吴文权. 三维对流扩散方程非等距网格上的四阶紧致格式及其多重网格方法[J]. 工程热物理学报, 2006, 27(5): 838-840.
- GE Yongbin, TIAN Zhenfu, WU Wenquan. Multigrid method and fourth-order compact scheme for 3D convection diffusion equation with unequal mesh-size discretization[J]. Journal of Engineering Thermophysics, 2006, 27(5): 838-840. (in Chinese)
- [20] Shukla R K, Zhong X L. Derivation of high-order compact finite difference schemes for non-uniform grid using polynomial interpolation[J]. Journal of Computational Physics, 2005, 204(2): 404-429.
- [21] Gamet L, Ducros F, Nicoud F, et al. Compact finite difference schemes on non-uniform meshes; application to direct numerical simulations of compressible flows[J]. International Journal for Numerical Method in Fluids, 1999, 29(1): 159-191.
- [22] Zhang J. Multigrid method and fourth-order compact scheme for 2D Poisson equation with unequal mesh-size discretization[J]. Journal of Computational Physics, 2002, 179(1): 170-179.
- [23] Hu F Q, Hussaini M Y, Manthey J L. Low dissipation and low dispersion Runge Kutta schemes for computational acoustics[J]. Journal of Computational Physics, 1996, 124(1): 177-191.
- [24] Carpenter M H, Gottlieb D, Abarbanel S. The stability of numerical boundary treatments for compact high order finite difference schemes[J]. Journal of Computational Physics, 1993, 108(2): 272-295.
- [25] Hardin J C, Ristorcelli J R, Tam C K W. ICASE/LaRC workshop on benchmark problems in computational aeroacoustics[R]. Virginia, USA: Langley Research Centre, 1994.